

ÜBUNGEN ZU ANALYSIS 1
Aufgaben des Tages 20 — Musterlösung

Aufgabe 1: (2 Punkte) Für zwei nichtleere Mengen A und B sei $f : A \rightarrow B$ eine Funktion. Dann ist die zugehörige *Graphenabbildung* $G_f : A \rightarrow A \times B$ definiert durch

$$G_f(x) := (x, f(x)) \quad \text{für } x \in A.$$

Zeige, dass G_f injektiv ist. Zeige weiterhin, dass f genau dann surjektiv ist, falls

$$P(G_f(A)) = B,$$

wobei $P : A \times B \rightarrow B$ die *Projektion* von $A \times B$ auf B bezeichnet, d.h. es gilt $P(x, y) = y$ für alle $(x, y) \in A \times B$.

Lösung. Seien $x, y \in A$ mit $G_f(x) = G_f(y)$, dann ist insbesondere $x = y$ und G_f ist also injektiv. Sei nun f surjektiv, dann gilt $f(A) = B$ und für jedes $z \in B$ existiert ein $x \in A$ mit $f(x) = z$. Es folgt

$$P(G_f(x)) = P(x, z) = z, \quad \text{also auch} \quad P(G_f(A)) = B.$$

Umgekehrt existiert für jedes $z \in B$ ein $x \in A$ mit $P(G_f(x)) = z$, also $P(G_f(x)) = f(x) = z$ und f ist surjektiv. ■

Aufgabe 2: (2+3 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und Koeffizienten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sei $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$p(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

ein Polynom vom Grad n , so dass insbesondere $a_n \neq 0$.

(a) Zeige, dass p genau dann gerade ist, wenn $a_k = 0$ für alle ungeraden Indizes k .

Zeige, dass p genau dann ungerade ist, wenn $a_k = 0$ für alle geraden Indizes k .

(b) Angenommen, alle Koeffizienten von p seien ganzzahlig, d.h. $a_k \in \mathbb{Z}$ für alle $k = 0, \dots, n$. Für $a, b \in \mathbb{N}$ sei weiterhin $\alpha = a/b \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von p , d.h. $p(\alpha) = 0$.

Beweise: Falls a und b teilerfremd sind, dann gelten $a_0/a \in \mathbb{Z}$ und $a_n/b \in \mathbb{Z}$.

Lösung. (a): Wenn p ungerade ist, gilt $-p(x) = p(-x)$, also

$$\sum_{k=0}^n -a_k x^k = \sum_{k=0}^n a_k (-x)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k x^k.$$

Daher folgt durch Koeffizientenvergleich, dass $-a_k = (-1)^k a_k$ für alle $k = 0, \dots, n$ und das ist genau dann der Fall, wenn $a_k = 0$ für alle geraden k gilt. Die andere Teilaufgabe kann genauso gelöst werden.

(b): Wegen $p(\alpha) = 0$ erhalten wir

$$\sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{a}{b}\right)^k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^n a_k a^k b^{n-k} = 0.$$

Also gilt insbesondere

$$a_n a^n = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k a^k b^{n-k} = b \left(\sum_{k=0}^{n-1} -a_k a^k b^{n-1-k} \right).$$

Deswegen finden wir, da die Summe auf der rechten Seite eine ganze Zahl ist,

$$\frac{a_n a^n}{b} \in \mathbb{Z} \quad \implies \quad \frac{a_n}{b} \in \mathbb{Z},$$

da a und b teilerfremd sind. Die Behauptung $a_0/a \in \mathbb{Z}$ folgt analog durch Auflösen nach dem Summanden $a_0 b^n$. ■

Aufgabe 3: (3 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, die die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

erfülle. Zeige, dass ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass f auf den rationalen Zahlen durch

$$f(x) = ax \quad \text{für alle } x \in \mathbb{Q}$$

eindeutig bestimmt ist.

Hinweis: Bestimme f zuerst auf den natürlichen Zahlen und auf der Null.

Lösung. Da $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ gilt, ist $f(0) = 0$. Induktiv erhalten wir ferner, wegen

$$f(n) = f((n-1)+1) = f(n-1) + f(1),$$

dass

$$f(n) = nf(1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

Wir decken die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ab, indem wir $-n$ für $n \in \mathbb{N}$ betrachten. Es gilt

$$0 = f(0) = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n) \implies f(-n) = -f(n) = -nf(1).$$

Schließlich schreiben wir eine rationale Zahl $q = r/s$ mit $r \in \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{N}$. Dann ist auch

$$f(r) = f\left(s \cdot \frac{r}{s}\right) = f\left(\sum_{k=1}^s \frac{r}{s}\right) = \sum_{k=1}^s f\left(\frac{r}{s}\right) = sf\left(\frac{r}{s}\right)$$

und daher

$$f\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{f(r)}{s} = \frac{r}{s} f(1).$$

Also gilt die Behauptung mit $a = f(1)$. ■